Introducción a la Teoría de Errores

ERRORES EN LAS MEDIDAS.

AJUSTE A DATOS EXPERIMENTALES.

El objeto de la mayoría de los experimentos físicos es el estudio cuantitativo de ciertas propiedades de la materia. Este estudio se realiza midiendo las magnitudes físicas que caracterizan las propiedades que interesan al experimentador.

1.- Concepto de medida

Medir consiste en obtener la magnitud (valor numérico) de algún objeto físico, mediante su comparación con otro de la misma naturaleza que tomamos como patrón.

Esta comparación con un patrón, que constituye el acto de medir, está sujeta a una incertidumbre, que puede tener diversos orígenes. Nunca lograremos obtener el verdadero valor de la magnitud, siempre vamos a obtener un valor aproximado de la misma y necesitamos pues indicar lo buena que es esta aproximación. Por ello junto con el valor de la magnitud medida se debe adjuntar una estimación de la incertidumbre o error al objeto de saber cuan fiable son los resultados que obtenemos.

Ejemplo 1: Medir la longitud de una hoja de papel con una regla. El error proviene de la escala: puede estar mal graduada, la longitud de la hoja puede quedar entre dos marcas, etc....

Ejemplo 2: Supongamos que alguien nos pregunte qué hora es. Disponemos de un reloj con minutero, pero no con segundero. Por lo tanto cuanto tratemos de estimar el tiempo estaremos cometiendo un error del orden de los minutos.

Ejemplo 3: Hemos determinado el valor de la aceleraciion de la gravedad, en nuestro laboratorio, la medida ha resultado ser:

$$g = (9.70 \pm 0.15) \text{ m/s}^2$$

Indicamos el error que hemos cometido en nuestra medida, ±0.15. ¿ Por qué? Pues porque al realizar una medida la vamos a utilizar para comprobar una cierta teoría, para compararla con medidas previas de esa misma magnitud, para ayudar en la predicción de resultados en otro experimento diferente, etc.... Por lo tanto el valor del error es crucial para poder interpretar el resultado.

2.- TIPOS DE ERRORES

El error de las medidas es la incertidumbre que tienen estas medidas y debe darse siempre junto con el valor de la medida.

La incertidumbre de las medidas proviene de distintas causas, que permiten clasificar a los errores en

a) **Errores sistemáticos**.

Son debidos a la presencia de **algún factor que no ha sido tenido en cuenta** y que altera de un modo significativo el resultado de la misma.

Estos errores se repiten constantemente en las medidas y **afectan al resultado final siempre en el mismo sentido** (una medida siempre mayor que la real o siempre menor).

Ejemplo 4:

- Errores de calibración en un aparato de medida: Si medimos una longitud con una regla mal graduada siempre obtendremos un valor erróneo en las medidas (siempre mayor que el real o siempre menor). Se puede detectar utilizando otra regla y comprobando que las mediciones no coinciden.
- No esperar a que la aguja de un amperímetro este en el cero de la escala antes de efectuar la medida.
- No tomar en consideración las fuerzas de fricción en el experimento de Millikan

(error sistemático en el modelo teórico del experimento).

En el ejemplo anterior del reloj, nuestro reloj puede atrasar o adelantar sin que nosostros lo sepamos.

Este tipo de errores debe ser siempre eliminado en la medida de lo posible.

b) **Errores de observación**.

Debido a defectos en la **actuación del experimentador**:

- Observar una escala desde un ángulo no adecuado.
- No equilibrar una balanza,
- Demorarse en parar o encender un reloj.
- Utilizar un amperimetro o un voltímetro en una escala que no es la adecuada.

Este tipo de errores debe ser eliminado.

Una vez eliminado estos errores aún quedan:

c) **Errores de precisión del aparato de medida** (incertidumbre experimental).

Todo aparato de medida presenta una limitación en cuanto a la precisión, **P**, con la que se puede dar una determinada magnitud. La propia escala del aparato hace que no sea posible apreciar variaciones en la medida por debajo de un determinado valor.

Ejemplo 5: Al medir con una regla hay que decidir si el extremo del objeto está más cerca de una marca que de la otra. Esto limita la precisión con la que se puede efectuar la medida.

- **Como norma** *se toma la incertidumbre en el valor leído como ☐ la mitad de la mínima división de la escala*

(0.5 mm. en una regla dividida en mm.).

Ejemplo 6: Al medir en un termómetro dividido en grados centígrados una lectura correcta sería (21 ☐ 0. 5) ºC.

- *En las medidas con aparatos con lecturas digitales, la incertidumbre será ☐ la mitad de su última cifra digital (salvo que las instrucciones del aparato digan lo contrario).*

Ejemplo: En el caso de un voltímetro digital con tres cifras de 000 a 999 una lectura correcta será (220 ☐ 0. 5) V.

d) **Errores estadísticos o aleatorios:**

Son el resultado de la contribución de **numerosas fuentes no controladas** que desplazan **aleatoriamente** (en un sentido o en otro) el valor de la medida respecto a su valor real.

Esto puede ser debido a:

Fluctuaciones en la corriente, variaciones de la luminosidad, variaciones de la presión, de la temperatura, señales eléctricas externas de motores, etc...

Los errores aleatorios tienen signo positivo o negativo, indiferentemente, y la influencia sobre los resultados no sigue ninguna ley constante.

No se pueden evitar y **para disminuir su influencia:**

¡se tiene que recurrir a la repetición de las medidas muchas veces.!

3. VALORES PROMEDIOS Y ERRORES

Supongamos que una determinada magnitud (ej. tiempo que tarda en caer una bolita de acero desde una determinada altitud.) se mide n veces y que se obtienen los siguientes resultados:

a_1 , a_2 , ..., a_n .

El verdadero valor de *a* NO se conoce.

por ello se **define** como **valor más probable de la magnitud** (la mejor aproximación a su valor real) *al* **valor promedio**, :

Podemos intentar justificar esta decisión:

Una manera de representar los resultados es mediante un esquema que indica el nº de veces que se obtienen determinados valores: *un histograma*.

Se divide el conjunto de valores en intervalos iguales y se cuenta cuantas veces ocurre el valor de la medición en cada intervalo.

Ejemplo 7: En el experimento de medir el tiempo de caida de una bola de acero desde una deteminada altura , se realizan las siguientes medidas:

nº de la medida	tiempo (s)
1	0.156
2	0.169
3	0.181
4	0.169
5	0.189
6	0.186
7	.
8	.
9	.
.	.
.	.
.	.
30	0.175

Construimos la siguiente tabla:

intervalos	nº de veces que cae la medida en el intervalo (frecuencia)
0.150 - 0.160	3
0-160 - 0.170	7
0.170 - 0.180	13
0.180 - 0.190	5

0.190 - 0.200	2

y con ella dibujamos el histograma correspondiente:

Si tomamos intervalos cada vez más pequeños:

intervalos	nº de veces que cae la medida en el intervalo (frecuencia)
0.150 - 0.155	1
0.155 - 0.160	2
0-160 - 0.165	3
0.165 - 0.170	4
0.170 - 0.175	5
0.175 - 0.180	8
0.180 -	3

0.185	
0.185 - 0.190	2
0.190 - 0.195	1
0.195 - 0.200	1

El histograma correspondiente resulta ser:

- Si el número de medidas es muy grande (*n □ □)* y la longitud de los intervalos tiende a cero obtenemos *una distribución*.

- En la mayoría de los fenómenos físicos , cuando se toman muchas medidas y se representa en ordenadas la fracción de los n valores que están en cada intervalo, la distribución adopta la forma siguiente:

- Esta distribución se llama *gaussiana o distribución normal*.

Esta distribución es simétrica respecto al valor que corresponde al máximo de probabilidad. Es decir, el máximo de la distribución corresponde al valor más probable de la magnitud medida es, precisamente, la media aritmética de las medidas tomadas:

- Si los errores cometidos al tomar las medidas son pequeños, todos los valores tomados estarán muy concentrados en torno a y la probabilidad de será grande (la medida de la magnitud será muy precisa)

- Si por el contrario los errores son grandes

La probabilidad de será pequeña y las medidas estarán muy dispersas en torno a la media.

- La precisión de la medida está pues relacionada con la anchura de la gaussiana y debe proporcionarse para saber la bondad de la medida efectuada.

- Una medida será tanto mejor cuanto menor sea el error con el que viene afectada.

- **Una medida del error cometido viene dada por el error estandard:**

4.-Modo de expresar los resultados.

Representamos los **resultados de una medida directa** como:

- Siendo

la mejor estimación del valor de la medida, es decir:

Valor medio si solo hay errores estadísticas

Valor numérico hasta la última cifra del aparato de medida si hay que considerar solo errores de precisión (basta con efectuar una sola medida).

☐ *x* es la cota del error , es decir:

☐ en caso de errores estadísticas

P en caso de errores de precisión

Cuando existen errores estadísticos **y** de precisión :

El error se toma como el máximo de ambos: ☐ *x* = max (☐ , **P**)

Ejemplo 8: Dadas las siguientes medidas de la masa, en gramos, de un muelle, todas con la misma precisión:

5.0 5.3 5.9 5.3 5.2 5.7 5.4 5.1 4.8 5.3

¿Cuál es la mejor estimación de la masa del muelle ?

En primer lugar calculamos la media:

Las desviaciones de la media, , son :

- 0.3 0.0 0.6 0.0 -0.1 0.4 0.1 -0.2 -0.5 0.0

Por lo tanto el error será:

La medida de la masa que estamos buscando es:

Ejemplo 9: Supongamos el valor obtenido para una cierta magnitud es a = 35.5 unidades y que el error estandard es ☐ = 0.3 *unidades* si el eror de precisión del aparato con el cual hemos tomado las medidad es de **P** = 0.5 *unidades* debemos expresar el resultado de la manera siguiente:

Aunque nunca podemos conocer el valor verdadero de una magnitud, si podemos obtener una muy buena estimación de esa cantidad a través de los datos obtenidos experimentalmente

- Cuando determinamos un error debemos pararnos a pensar si la cantidad obtenida es **correcta** (lo mismo cabe decir en cuanto al valor de la magnitud).

Una comprobación que debe hacerse es que las dimensiones del error sean las mismas que las de la magnitud. Debemos tener en cuenta si el error es demasiado grande (ej. del orden de la magnitud medida) o demasiado pequeño (ej. un error del 0.01% de la magnitud medida) comparado con la medida. Tambien debe tenerse en cuenta que si una medida se desvia **significativamente** de las otras, seguramente habremos cometido algún error al tomarla y no debemos incluirla en nuestros promedios.

5. - Reglas de redondeo.

La inmensa mayoría de las magnitudes que se utilizan en el cálculo son aproximadas: las cantidades físicas que se han medido en el experimento y las constantes matemáticas que con las que se trabajan (☐ , e,....) se toman con un número finito de decimales. Los resultados de las operaciones son números para los cuales, en principio, no se conoce el valor exacto. Por ello, el número de cifras significativas en el resultado será limitado. No tiene, pues, sentido considerar en más cifras decimales de las que muestra el error.

Supongamos que queremos redondear un número de manera que quede expreado con n cifras significativas:

- Si la (n+1)-esima cifra suprimida es **menor que 5** la n-esima cifra conservada **no varia.**
- Si la (n+1)-esima cifra suprimida es **mayor que 5** la n-esima cifra conservada **aumenta en 1.**
- Si la (n+1)-esima cifra suprimida es **igual a 5**:

1) Si entre las cifras suprimidas además de la 5 hay **otras** cifras **distintas de cero**: la n-esima cifra conservada **aumenta en 1**.

2) Todas las cifras suprimidas, salvo la cifra 5 son cero: la n-esima cifra conservada **aumenta en 1** si el número de cifras suprimidas es **impar**, **no varia** si es **par**.

Ejemplo 10:

732.5678 se redondea a tres cifras decimales como 732.568 732.5673 se redondea a tres cifras decimales como 732.567 732.564512 se redondea a tres cifras decimales como 732.565

732.564500 se redondea a tres cifras decimales como 732.565

732.5645000 se redondea a tres cifras decimales como 732.564

- **El error no debe darse con más de dos cifras significativas.**

- La última cifra en la expresión de la magnitud y en el error deben ser del mismo orden decimal.

Ejemplo 11: Determinemos las cifras significativas los siguientes números:

145.20 .... 5 cifras significativas

1452000 .... 7 cifras significativas

145.2 .... 4 cifras signitivativas

0.0014520 .... 5 cifras significativas (las tres primeras sirven para determinar el lugar de la coma)

Ejemplo 12:

incorrecto	**correcto**

8.347 0.00526 0.030 0.00415 25721 1520	8.347 0.005 0.030 0.004 (2.57 0.15) x 10^4
0.00272 0.0003 143.492 0.5 342.1 0.001	0.0027 0.0003 143.5 0.5 342.100 0.001

6. - MEDIDAS INDIRECTAS. PROPAGACIÓN DE ERRORES.

Ciertas magnitudes no son accesibles de forma directa al experimentador y la medida de las mismas debe hacerse *indirectamente* por medio de otras que si es posible medir de forma directa.

Ejemplo 13: La medida de la gravedad, *g*, en el experimento de caída libre; la velocidad de la gota de aceite en el experimento de Millikan se obtiene como el cociente de un espacio y una medida de tiempo, el valor de la cte de recuperación de un muelle, etc...

En el experimento de caida libre, se suelta una bola desde una determinada altura, *h*, y se mide su tiempo de caida, *t*. El valor de *g* se obtiene de forma indirecta a través de la relación:

Si conocemos la forma de la función que relaciona las variables directamente medibles x_1 , x_2 , ..., x_n , con las medidas indirectas $y = f(x_1 , x_2 , ..., x_n)$

Conociendo el error que tienen cada una de las medidas directas x_i = □ □ *xi* podemos estimar el error □ *y* que afectará a esta medida indirecta *y*.

En nuestro ejemplo de caida libre: x_1 = h, x_2 = t, y = g

- Cuando los errores □ *xi* son suficientemente pequeños frente a los valores x_i , podemos desarrollar *y* en serie de Taylor hasta primer orden :

$f (x_1$ □ □ x_1 , x_2 □ □ $x_2 , ..., x_n$ □ □ $x_n) = f (x_1 , x_2 , ..., x_n) +$

+

definimos el error en y como:

$\square\, y = f\,(x_1 \square \square x_1 , x_2 \square \square x_2 , ..., x_n \square \square x_n) - f\,(x_1 , x_2 , ..., x_n) =$

=

es decir:

Expresión que indica como **el error en las medidas directas se transmite a las medidas que se hagan a partir de ellas.**

Ejemplo 14:

Supongamos que se conocen las magnitudes x_1 y x_2 con sus respectivos errores

$\square\, x_{1\,,\,\square} x_2$, entonces el error en la magnitud:

se obtendrá de la siguiente forma:

por lo tanto:

- En el caso de productos, cocientes o potencias, resulta mucho más **sencillo** tomar logaritmos neperianos antes de diferenciar:

Ejemplo 15:

Si se conocen las magnitudes x_1 y x_2 con sus respectivos errores $\square\, x_{1\,,\,\square} x_2$,, la expresion para el error de la función *y* será:

Ejemplo 16:

Dada la función $F = 3\ x\ y^2\ z$ con

el error en F será:

$\ln F = \ln 3 + \ln x + 2 \ln y + \ln z$

Ejemplo 17:

Determinar el volumen de una bola de cero

- Volumen de la esfera
- Error en el volumen ln V = ln (4/3) + ln ☐ + 3 ln r ;

☐ V = 3 (☐ r/r) V = 3.154........mm^3

- El volumen de la bola será V = (526.747888

3.154......) mm^3

- Expresado correctamente con dos cifras significativas en el error:

V = (526.7 3.1) mm^3

Ejemplo 18:

Un condensador se descarga a traves de una resistencia. Calcular la carga al cabo de 12s.

C = (1000 100) ☐ F; V = 12 V; R = (12000 1200) ☐ ; t = (12.0 0.5) s.

- Expresión para la carga de un condensador en función del tiempo:

donde

- Convertimos la carga del condensador a unidades de S.I :

C = (1000 100) x 10^{-6} F = (0.001 0.0001) F

La carga inicial del condensador es : Q_0 = 0.001 x 12 = 0.012 C

- Al cabo de 12 s la carga del condensador será:

- El error en la carga es:

(**¡ojo!** los erores siempre se **suman**)

Calculemos los valores que aparecen en esta expresión:

- Por lo tanto : ☐ Q = 1.5047 x 10^{-3}

- La carga que estamos buscando es: Q = (4.4

1.5) x 10^{-3} C

o bien si expresamos el error con una sola cifra significativa : Q = (4 2) x 10^{-3} C

7.- PONDERACIÓN DE LOS RESULTADOS. MEDIA PESADA.

Si queremos determinar una cierta cantidad sabemos que debemos efectuar una serie de medidas a_1 , a_2 , ... , a_n , repetidas todas ellas en las mismas condiciones. Se determina el promedio, , y el error estandard, ☐ , y el resultado viene dado como:

(Suponiendo despreciables los errores de precisión del aparato)

Esto es correcto puesto que todas las medidas a_i se han tomado bajo las mismas condiciones y no existe ninguna razón para asignar mayor peso a unas que a otras.

Ocurre a veces , sin embargo, que en ocasiones obtenemos varios valores de una misma magnitud con errores diferentes. En ese caso, debemos dar mayor importancia o " peso" a la medida que viene afectada de un error menor.

El modo de proceder es el siguiente:

Supongamos que para la magnitud A tenemos varias medidas, cada una con un error diferente:

a_1 ☐ $_1$, a_2 ☐ $_2$, ...,a_n ☐ $_n$.

La manera de obtener el promedio y el error en A es la siguiente:

Ejemplo 19:

Se conoce la distancia focal de una lente, f, obtenida con dos métodos distintos:

f_1 = (14.476 0.002) cm ; f_2 = (14.46 0.08) cm . Queremos conocer la mejor estimación para la distancia focal de esa lente.

Aplicando las relaciones anteriores, el valor más probable para la distancia focal será:

= 0.002 cm

Es decir: f = (14.473 0.002) cm

8. Ajuste a datos experimentales. Estimación de parámetros.

Supongamos que hemos obtenido *n* medidas independientes de dos magnitudes físicas *x* e *y* que, teóricamente, están relacionadas por medio de una cierta función en la que aparecen varios parámetros:

$y = f(x, a, b)$

siendo *a, b* = parámetros ; $(x_i, y_i)_{y=1,......,n}$ medidas experimentales

Ejemplo 20:

1) $y = a\,x + b$.

Encontramos una función de este tipo en la práctica de la constante recuperadora del resorte: *y* es el peso F al que se somete el resorte, *x* su elongación. El parámetro *a* será, entonces, la constante recuperadora del muelle que designamos como K, y b debe ser nulo: F = K x

2) $y = a\,x^2 + b$.

Encontramos una función de este tipo en la práctica de la medida de g (aceleración de la gravedad) mediante caída libre, se tiene :

$y = h$, $a = ½\, g$, $x = t$, $b = 0$.

Estamos, pues, interesados en calcular, **a partir de las medidas experimentales**

$(x_i , y_i)_{y = 1,...., n}$

la mejor estimación de los parámetros a y b.

- La forma más adecuada de proceder es utilizar un ajuste por mínimos cuadrados

Ajuste por mínimos cuadrados

Tenemos un conjunto de *n* medidas experimentales de *x* e *y:*

$(x_i , y_i)_{y = 1,...., n}$

conocemos la ley teórica que liga las variables *y* e *x:*

$y = f (x, a, b)$

podemos pues calcular los valores teóricos de *y:*

$y_{i\ (teóricos)} = f (x_i, a, b)$

Los valores $y_{i\ (exp)}$ no coinciden con los valores $y_{i\ (teóricos)}$ debido a los errores experimentales, de redondeo, etc..... . Las mejores estimaciones de los parámetros *a* y *b* serán aquellas que hagan mínima la diferencia entre los valores teóricos y los experimentales, $y_{i\ (teóricos)}$ e $y_{i\ (exp)}$

- **Para fijar ideas** vamos a efectuar un ajuste a una recta, es decir: $y = a\ x + b.$

Sabemos que teóricamente $y = a\ x + b$, sustituimos en esa expresión los x_i y obtenemos un conjunto de $y_{i\ (teóricos)}$

Entonces debe cumplirse:

Tenemos, pues, una función □ *(a,b)* que depende de *a* y de *b*, debemos calcular los valores de *a* y *b* que minimizan esa función. Para ello deben anularse las derivadas de esta función respecto de *a* y de *b*:

Para simplificar estas expresiones llamamos:

y entonces las expresiones quedarán finalmente como

$a\,x^2 + b\,x = x\,y$

$a\,x + b\,n = y$

que es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, *a* y *b* , que puede ser fácilmente resuelto, por ejemplo utilizando la regla de Cramer. Los parámetros *a* y *b* vienen dados entonces, por:

Es decir:

- Estas son las mejores estimaciones de los parámetros *a* y *b* en base a las medidas disponibles

- De forma similar podriamos efectuar un ajuste a una parábola, $y = a\,x^2 + b\,x + c$, o a cualquier otra función polinómica.

9. - Representación gráfica de datos experimentales.

En la práctica es muy útil expresar los resultados experimentales gráficamente ya que tiene las siguientes ventajas:

1) De un solo golpe de vista se destacan no solo los detalles, sino el conjunto del fenómeno en el intervalo en que se han hecho las medidas.

2) Es posible conocer otros valores de la variable dependiente sin necesidad de determinación experimental.

3) Se ponen de relieve aquellas medidas que están afectadas de un error anormal pues se separan netamente de la gráfica, etc....

Ahora bien, para que de la representación gráfica se obtenga la máxima información ha de ajustarse a ciertas normas que vamos a dar a continuación:

1.- **La gráfica debe representarse en papel milimetrado**, empezando por dibujar los ejes de coordenadas. (Cuando para la representación se utiliza una computadora, el software escala el gráfico.)

2.- Debe llevar un **título suficientemente explícito** en la parte superior. Sobre **ambos ejes** se debe indicar la **magnitud representada** en cada uno de ellos, así como la **unidad** en que ha sido medida. También se anotará sobre el papel milimetrado la **tabla de valores de las variables** obtenidos en la experiencia.

3.- La variable independiente ha de ir representada en el eje de abcisas y la dependiente en el de ordenadas.

4.- Hay que procurar que los **puntos experimentales no queden demasiado juntos**. Para obtener una mayor información los puntos tienen que estar bien esparcidos.

5.- Deben **escogerse las escalas** correspondientes a ambos ejes de forma que **comprendan solamente los intervalos dentro de los cuales vamos a representar las medidas realizadas**, por tanto, en algunos caos las escalas **no** empezaran en cero.

6.- Sobre los ejes **solo se indican los valores correspondientes a las divisiones enteras** de la escala, que quedan de esta forma **uniformemente esparcidos**, jamás se señalan sobre ellos los valores correspondientes a las medidas realizadas.

7.- Los valores medidos se representan sobre el papel milimetrado por el punto correspondiente a sus dos coordenadas (puntos experimentales) y rodeados por el llamado rectángulo de error cuya base abarca desde x-☐ x hasta x+☐ x y cuya altura desde y-☐ y hasta y+☐ y. En el caso de que ☐ x o ☐ y sean despreciables en comparación con la escala correspondiente utilizada, el rectángulo de error queda reducido a un simple segmento vertical u horizontal, respectivamente. Si son despreciables ambos errores, solamente se representa un punto.

8.- **Las gráficas han de ser líneas finas y continuas, nunca quebradas, aunque, para ello, dejen muchas veces de pasar por los puntos experimentales** que pueden quedar a derecha o a izquierda de la gráfica. Si algún punto cae exageradamente desplazado hay que rechazarlo y suponer que, por alguna razón la medida fue errónea, por lo que debe repetirse.

Ejemplo 21: Supongamos que estamos calculando el valor de la aceleración de la gravedad mediante caída libre y hemos obtenido los siguientes resultados:

s (m)	t (s)	t^2 (s^2)
0.40	0.286	0.082
0.35	0.260	0.067
0.30	0.247	0.061
0.25	0.215	0.046
0.20	0-202	0.041
0.15	0.175	0.031

Su representación gráfica nos dará el valor de g realizando un ajuste por mínimos cuadrados, donde la pendiente de la recta es igual a:

$1/2\ g = 4.91$ □ $g = 9.8\ m/s^2$

La representación gráfica de los resultados será de esta forma:

10.- BIBLIOGRAFÍA

- **Teoría de los errores**. Vincenzo Giamberardino*. Ed.Reverté Venezolana*

- **A practical guide to data analysis for physical science students**. Louis Lyons. *Ed. Cambridge Universty Press*.

ERRORES EN LAS MEDIDAS (RESUMEN)

- **Valor más probable de la magnitud :**

- **Error estandard:**

- **Forma de expresar el resultado:**

<u>☐ *x* es la cota del error</u> , es decir:

☐ en caso de <u>errores estadísticas</u>

P en caso de <u>errores de precisión</u>

<u>Cuando existen errores estadísticos **y** de precisión</u> :

El error se toma como el <u>máximo de ambos</u>: ☐ *x* = max (☐ , **P**)

- **El error no debe darse con más de dos cifras significativas.**
- **La última cifra en la expresión de la magnitud y en el error deben ser del mismo orden decimal.**

- **Transmisión de errores:**

Expresión que indica como **el error en las medidas directas se transmite a las medidas que se hagan a partir de ellas.**

- En el caso de productos, cocientes o potencias, resulta mucho más **sencillo** tomar logaritmos neperianos antes de diferenciar:

Dada la función:

- **Ajuste por mínimos cuadrados:**

Dada la funcion $y = a\,x + b$