LEY DE HOOKE: CONSTANTE DE RECUPERACIÓN DE UN CUERPO ELÁSTICO.

Para la realización de esta práctica el alumno deberá venir al laboratorio provisto con hojas de papel milimetrado

Objetivo:

Estudiar la ley que rige el comportamiento de los cuerpos elásticos frente a pequeñas deformaciones. Se efectuarán medidas estáticas para la determinación de la constante de recuperación de varios resortes y se estudiará el efecto de la masa de cada resorte en la dinámica del mismo.

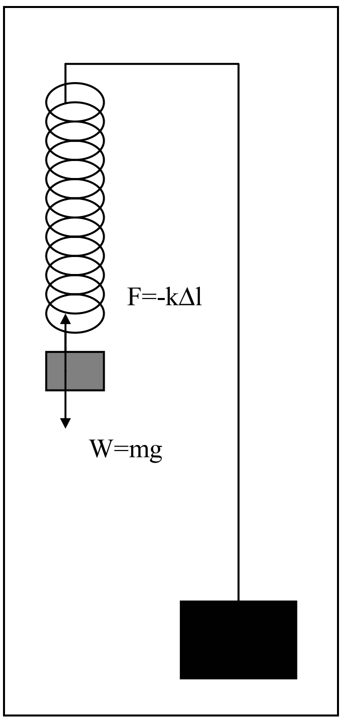
Material:

2 resortes
1 platillo para situar las pesas
1 dispositivo para colgar los resortes previsto de una regla.
juego de pesas.
1 cronómetro.

Introducción:

Un cuerpo se denomina **elástico** si al actuar una fuerza sobre él sufre una deformación de tal manera que al cesar de actuar la fuerza recupera su forma original. El prototipo (macroscópico) de un cuerpo elástico lo constituye un resorte o muelle en un rango de deformaciones no demasiado grandes (rango de elasticidad). Si la deformación supera un cierto umbral (límite de elasticidad) el resorte queda permanentemente deformado.

El cuerpo elástico (el "resorte" de ahora en adelante) es en sí mismo un sistema microscópico bastante complejo. Sin embargo, la fuerza que dicho cuerpo ejerce sobre un objeto unido a uno de sus extremos resulta satisfactoriamente descrita por la llamada Ley de Hooke: la fuerza que ejerce el resorte sobre el cuerpo es proporcional y tiene el sentido opuesto a la deformación del resorte, tendiendo a que el resorte recupere su longitud original. (es decir, tendiendo a devolver al sistema a su estado de equilibrio).



La constante de proporcionalidad entre la fuerza y la deformación se denomina **constante de recuperación**, y se denota habitualmente por el símbolo **k**. Sus unidades son N/m en el sistema MKS y din/cm en el sistema CGS.

La expresión matemática de la Ley de Hooke es $\mathbf{F=-k\,\Delta l}$ donde:

$\mathbf{\Delta l}$ - deformación del resorte
k - constante de recuperación

La fuerza ejercida por un resorte es un ejemplo de un tipo más general de fuerzas denominadas **fuerzas elásticas o armónicas**. En general, todo sistema en las proximidades de un punto de equilibrio estable (que se caracteriza por que las fuerzas que actúan sobre el sistema en ese punto son nulas y porque las fuerzas que aparecen cuando se producen pequeñas desplazamientos respecto del equilibrio tienen un sentido tal que tienden a hacer retornar al sistema al punto de equilibrio) obedece en primera aproximación a una ley de fuerzas de este tipo, que genera un tipo de movimiento llamado **Movimiento Armónico Simple**. En está practica se estudiara el ejemplo del sistema armónico representado por un resorte sometido a pequeñas deformaciones.

Realización practica:

Esta experiencia se divide en tres partes:

I. Determinación de la constante de recuperación k de un resorte.

Una forma de obtener experimentalmente la constante de recuperación de un resorte consiste en medir las elongaciones que sufre el *resorte en reposo*. A tal fin hacemos uso de la expresión dada por **k** para un resorte en reposo cuya deducción teórica viene detallada a continucaión:

Deducción de la expresión matématica para k para un resorte en reposo:

- Si en el extremo de un resorte vertical se coloca un platillo de masa $\mathbf{m_p}$ y sobre éste un cuerpo de masa $\mathbf{m_i}$ y si *se considera que no hay rozamiento y se desprecia la masa del resorte* se encuentra la siguiente ecuación del movimiento del sistema masa-platillo:

$$(m_i+m_p)g - k(y-y_o) = (m_i+m_p)d^2y/dt^2 \qquad (1)$$

donde:

g-aceleracion de la gravedad
$\mathbf{y_o}$-longitud natural del resorte
y-longitud del resorte en el instante considerado.

- En la posición de equilibrio del resorte ($\mathbf{y_e}$) la fuerza y con ello también la aceleración son nulas y por tanto:

$$(m_i+m_p)g = k(y_e-y_o). \qquad (2)$$

- Si únicamente el platillo se encuentra suspendido del resorte ($\mathbf{m_i}$=0) se tiene:

$$m_pg = k(y_{ep}-y_o) \qquad (3)$$

donde $\mathbf{y_{ep}}$ la posición de equilibrio del resorte con el platillo.

- Eliminándo $\mathbf{y_o}$ de estas dos ultimas ecuaciones se obtiene:

$$m_ig = k(y_e-y_{ep}) \qquad (4)$$

*Esta ecuación permite calcular **k** a partir de la medida de la elongacion respecto de la posición de equilibrio del platillo, $\mathbf{y_e-y_{ep}}$, correspondiente a la colocación de una determinada masa $\mathbf{m_i}$.*

Se sugiere seguir el siguiente procedimiento:

1) Se determina $\mathbf{y_{ep}}$ (posición de equilibrio del resorte con el platillo colgante) colocando el platillo (sin pesas) en el extremo del resorte.
2) Se escogen pesas de distinta masa (unas 10), que no debe ser excesivamente grande para no exceder el limite de elasticidad del resorte, y se miden las posiciones de equilibrio del resorte $\mathbf{y_e}$ con cada una de ellas.

Repetir la experiencia para los dos resortes de distintas caracteristicas.

3) Se calcula **k:**

a) usando la formula (4) para cada pesa. (Efectuar el tratamiento de errores correspondiente).

b) Representando gráficamente $\mathbf{m_i g}$ frente a $\mathbf{(y_e\text{-}y_{ep})}$ y ajustando a una recta por el método de *mínimos cuadrados*. La constante **k** se obtiene a partir de la pendiente de la recta de ajuste**.**

Nota:

El hecho de que el resorte sea un cuerpo con masa produce ciertamente una pequeña deformación en el mismo cuando es colgado verticalmente. Suponemos que esta deformación no afecta al valor de $\mathbf{(y_e\text{-}y_{ep})}$, lo cual es razonable si se tiene en cuenta que debe estar presente tanto en la medida de $\mathbf{y_e}$ como en la de $\mathbf{y_{ep}}$ y se cancela por lo tanto al tomar la diferencia.

II. Acoplamiento de dos resortes:

Cuando dos resortes de constantes $\mathbf{k_1}$ y $\mathbf{k_2}$ se unen por un extremo el sistema resultante, como es de suponer, obedece también a la Ley de Hooke, es decir, es también un sistema elástico o armónico, y su constante elástica **k’** viene dada por:

$$\frac{1}{k'} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \qquad \textbf{(5)}$$

Se requiere comprobar esta expresión en el caso de dos resortes distintos.

El procedimiento a seguir es:

1) Acoplar dos resortes.
2) Efectuar las medidas del sistema mediante el método estático (I) y calcular la constante **k’** del sistema (ver nota).
3) Comprobar la expersión **(5)** conociendo los valores de $\mathbf{k_1}$ y $\mathbf{k_2}$ del apartado I.

Nota:

Se aconseja usar pesas con masa mayor que la de los dos resortes acoplados. Sin embargo se da el caso que al colocar pesas cuya masa es mayor, la elongación del sistema compuesto por los dos resortes es mayor que la longitud del dispositivo dado de cual cuelgan los resortes, haciendo imposible la realización de esta parte de la practica (el alumno facilmente puede comprobar este hecho). Con lo cual la realización práctica de este apartado se lleva a cabo con pesas (3 pesas) cuya masa es menor que la del sistema compuesto por los dos resortes.

III. Medidas dinámicas en un resorte.

Antes de empezar a tomar las medidas pertinentes, a continuación se hará un breve analisis teórico de la dinámica del sistema dado por el resorte:

Ecuacion del movimiento del resorte.

- Si se eliminana $\mathbf{y_o}$ de la ecuación (2) y se sustituye en (1) se obtiene:

$$-k(y-y_e) = (m_i+m_p)d^2y/dt^2 = (m_i+m_p)d^2(y-y_e)/dt^2 \qquad (6)$$

- Si se considera el desplazamiento respecto de la posición de equilibrio, $\mathbf{Y=y-y_e}$, se llega a la ecuación del Oscilador Armónico Simple:

$$d^2Y/dt^2 + \omega^2 Y=0 \qquad (7)$$

donde el parámetro ω es la **frecuencia angular del oscilador.** En este caso se tiene $\omega^2=k/(m_i+m_p)$, y el **período de oscilación** del sistema es $T=2\pi/\omega$.

- Por lo tanto:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_i + m_p}{k}} \qquad (8)$$

Este desarrollo teórico corresponde a la suposición de que la masa del resorte es nula y que no existen fenómenos de rozamiento o disipación de la energía.
¿Cómo afecta el rozamiento que pueda tener el sistema y la propia masa del resorte al período del movimiento?

(i) El rozamiento no afecta a la medida del período del movimiento.*
ii) La masa del resorte afecta al período del movimiento.* Aqui no vamos a deducir en todo rigor esta dependencia, pero una suposición razonable (un *ansatz* en la jerga física al uso) consiste en considerar que la masa del resorte, $\mathbf{m_r}$, participa en una fracción α (desconocida de antemano) en la dinámica del sistema descrita por la ecuación (6).

- De acuerdo con esta suposición la expresión del período debe ser:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m_i + m_p + \alpha m_r}{k}} \qquad (9)$$

- Dependiendo de los valores que adquiera α la expresión anterior abarca los siguientes casos:

α=0	Se desprecia la inercia (masa) del resorte completamente
α=1	Se supone que toda la masa del resorte se encuentra concentrada en el extremo inferior del mismo ya que en este caso m_r entrá en la expresión del período del mismo modo que lo hacen m_i y m_p.
α=1/3	Se puede demostrar que este caso corresponde a un alargamiento o compresión uniformes del resorte.

En cualquier caso, es claro que un análisis riguroso del problema conduciría a una dinámica algo más complicada del sistema resorte+masa colgante y a una dependencia del período con la masa del resorte no tan elemental como la que hemos supuesto. No obstante, una expresión como la anterior puede ser una buena aproximación de esta ley más complicada, para un cierto valor del parámetro α.** Esto se comprobará en la presente experiencia.

El procedimiento a seguir es el siguiente:

Esta experiencia se realiza para un solo resorte. Se aconseja usar el resorte cuyo valor de **k** es menor.

1) Medir la masa del resorte, $\mathbf{m_r}$, y la masa del platillo, $\mathbf{m_p}$.
2) Colocar una pesa en el platillo y desplazar el sistema de su posición de equilibrio. Dejarlo oscilar libremente procurando que las oscilaciones sean verticales. Cronometrar el tiempo que el sistema invierte en realizar un cierto número de oscilaciones (5 oscilaciones, por ejemplo). Calcular el período correspondiente a cada masa $\mathbf{m_i}$.
Repetir esto para distintas pesas (cinco pesas diferentes). Para cada pesa repetir este procedimiento para dos pequeños desplazamientos iniciales distintos y comprobar que el período es independiente del desplazamiento inicial.
3) Determinar la constante α (para cada pesa empleada) utilizando la expresión (9) y usando el valor de **k** obtenido en el apartado anterior. Estimar el error cometido.

NOTA:

- Al terminar la realización de esta práctica el alumno debe entregar; ANTES DE SALIR DEL LABORATORIO, al profesor encargado, la hoja de resultados que se adjunta.

---

* (i) Por efecto del rozamiento se observa que el movimiento del sistema es en realidad armónico amortiguado, decayendo la amplitud de las oscilaciones conforme aumenta el tiempo: al cabo de un cierto tiempo el sistema se encontrará en reposo en su posición de equilibrio. Aun cuando la amplitud disminuya con el tiempo, el período (el lapsus de tiempo entre dos oscilaciones) no varía apreciablemente respecto del caso sin rozamiento. El rozamiento por lo tanto no afecta a la medida del período del movimiento y obviamente tampoco altera la posición de equilibrio del mismo.

ii) La masa del resorte afecta al período del movimiento, haciendo que el período sea más grande que en el caso ideal considerado anteriormente, donde se supone que el resorte carece de masa. El resorte constituye un sistema macroscópico deformable y la dependencia entre el período y la masa del resorte no es inmediata.

** Si la masa del resorte es efectivamente despreciable en la dinámica del sistema, se podría calcular **k** a partir de la expresión (9) con α=0, midiendo el período de las pequeñas oscilaciones del sistema entorno a su posición de equilibrio:

$$\mathbf{T = 2\pi\, ((m_i+m_p)/k)^{0.5}} \qquad \mathbf{(10)}$$

Presumiblemente la masa del resorte sí que afecta a la dinámica del sistema (tanto más apreciablemente cuanto las masa del platillo y de las pesas sean despreciables en comparación con la masa del resorte) y el resultado de aplicar esta expresión no coincidirá con el obtenido en el apartado anterior, para el pendulo en reposo (el alumno puede comprobar esto).

LEY DE HOOKE:CONSTANTE DE RECUPERACIÓN DE UN CUERPO ELÁSTICO.

ALUMNO: ....
GRUPO: ....
DIA: ....
PROFESOR ENCARGADO: ....

I.- Determinación de la constante de recuperación de un resorte.

Primer resorte:

y_{ep} =

m_p =

m_i	y_e	k

k =

recta de ajuste = $\longrightarrow$ k =

Comparación con el valor anterior.

Segundo resorte:

y_{ep} =

m_p =

m_i	y_e	k

k =

II.- Acoplamiento de resortes:

k_1 =

k_2 =

y_{ep} =

m_i	y_e	k'

Comprobación de la expresión (5):

III.- Medidas dinámicas en un resorte:

m_r =

m_p =

k =

primer desplazamiento inicial:

m_i	T	α

segundo desplazamiento inicial:

m_i	T	α

Discutir brevemente de cómo influye α en la dinámica del resorte.

Presentar la expresión téorica obtenida para el cálculo del error en α :

$\Delta\alpha$=